Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Andrea Nardi

Tutorato 6 - 26 Novembre 2013

1. Calcolare
$$\int_1^{+\infty} \left(x + \frac{2}{t}\right) \frac{e^{-tx}}{t^2}\, dt, \quad x \geq 0.$$

2. Sviluppare le seguenti funzioni (estese per periodicitá al di fuori dell'intervallo $[-\pi, \pi]$) in serie di Fourier:

   (a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x \leq -1 \\ 2x & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } \quad 1 < x \leq \pi \end{cases}$;

   (b) $g(x) = \pi x - |x|x$.
   Inoltre verificare che
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \ ;$$

   (c) $h(x) = \max\{2, 2-x\}$.

3. Sapendo che:
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \qquad \textbf{(Identitá di Parseval)}$$
verificare, mediante lo sviluppo in serie di Fourier delle funzioni

   (a) $f_1(x) = e^x$ (b) $f_2(x) = x^2$ (c) $f_3(x) = x\cos(x)$

   che:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2}(\pi\coth(\pi) - 1)$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{(n^2-1)^2} = \frac{4\pi^2+3}{48}$.

4. Sviluppare $F_P(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ (estesa per periodicitá al di fuori dell'intervallo $[0, 2\pi)$) in serie di Fourier.
Mediante il risultato ottenuto, verificare che
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{64} \ .$$

5. (§) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)}\, dx$.